Développements limités

En physique et en mathématiques, un développement limité (ou DL) d'une fonction en un point est une **approximation polynomiale** de cette fonction au voisinage de ce point. Le but est d'avoir une expression **approchée** plus facilement exploitable et souvent suffisante. Par exemple, pourquoi s'embêter avec le sinus d'un angle si on sait que l'angle sera toujours petit dans le cas considéré ?

Le but de cette fiche méthode est d'apporter les bases de cette notion pour un physicien, une étude plus complète sera effectuée en cours de mathématiques. On supposera donc que toutes les conditions d'utilisation d'un DL sont vérifiées dans les situations que nous aborderons, on ne se préoccupera donc pas de les vérifier.

1 Définition mathématique

Le développement limité de la fonction f, à l'ordre n en x_0 est donné par :

$$\text{DL :} \quad \boxed{f(x) \approx f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left.\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\right|_{x=x_0}}$$

Mathématiquement, il existe un terme de reste pour avoir l'égalité stricte, en physique on considérera qu'il est négligeable et donc nul.

2 Tangente à une courbe

La tangente à une courbe est l'approximation affine de cette courbe, c'est donc le DL à l'ordre 1. La tangente d'une fonction $f(x)$ en x_0 est donc :

$$\text{Tangente :} \quad \boxed{y(x) = f(x_0) + (x-x_0) \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}}$$

3 DL à connaître et approximation des petits angles

DL à connaître ♥

DL d'ordre 1 au voisinage de 0

$$e^x \approx 1 + x \qquad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \qquad \ln(1+x) \approx x$$

DL d'ordre 2 au voisinage de 0

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \sin x \approx x \qquad \tan x \approx x$$

Dans les exercices, nous supposerons souvent que les angles sont « petits ». Le réflexe à adopter est alors d'effectuer un DL d'ordre 2 des fonctions trigonométriques. En pratique, cette approximation est légitime pour des angles inférieure à 30°.