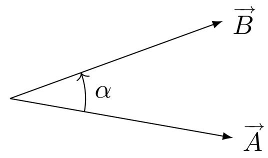
Produit scalaire et Projection de vecteur

1 Produit scalaire

Définition 1 : Produit scalaire

Le **produit scalaire** entre deux vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ est un scalaire et est noté $\vec{A} \cdot \vec{B}$.
Il est défini de la manière suivante :



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left\|\vec{A}\right\| \left\|\vec{B}\right\| \cos(\alpha)$$

avec $\alpha = (\widehat{\vec{A};\vec{B}})$ angle formé par les deux vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ de normes respectives $\left\|\vec{A}\right\|$ et $\left\|\vec{B}\right\|$.

Propriétés

- Symétrique : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires ou orthogonaux est nul. $\vec{A} \perp \vec{B} \quad \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
- La norme des deux vecteurs étant fixée, le produit scalaire de deux vecteurs est extrémal lorsque le cosinus vaut ± 1, c'est-à-dire lorsque les deux vecteurs sont colinéaires ($\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$).
- Distributivité : $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- $\vec{A} \cdot \vec{A} = \left\|\vec{A}\right\| \left\|\vec{A}\right\| = \left\|\vec{A}\right\|^2$.

  $\Rightarrow$ La norme d'un vecteur est la racine de son carré scalaire : $\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$
- Soit deux vecteurs exprimés **dans une même base orthonormée** $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

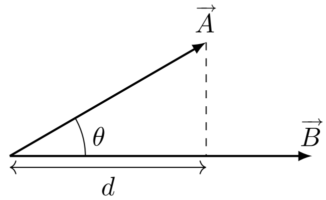
$$\begin{array}{l} \vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z \\ \vec{B} = B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

2 Projection d'un vecteur

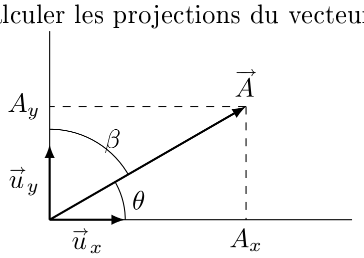
Définition 2 : Projection d'un vecteur

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \underbrace{\left\|\vec{A}\right\| \cos\theta}_{=d} \left\|\vec{B}\right\| = d\left\|\vec{B}\right\|$$

d est **la projection** du vecteur $\vec{A}$ sur $\vec{B}$.



Projection d'un vecteur dans une base : pour obtenir la décomposition d'un vecteur dans une base, il faut calculer les projections du vecteur sur chacun des vecteurs unitaires de la base.

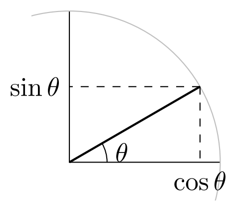


$$\boxed{\vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y \quad \text{avec :} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x = \vec{A} \cdot \vec{u}_x = \left\|\vec{A}\right\| \cos\theta \\ A_y = \vec{A} \cdot \vec{u}_y = \left\|\vec{A}\right\| \sin\theta \end{array} \right.}$$

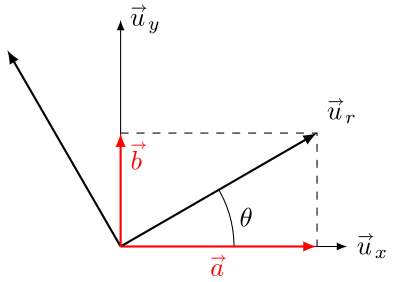
➪ Pourquoi un sinus pour A_y alors que c'est un cosinus pour A_x ?
Pour calculer A_y, il faut considérer l'angle β entre $\vec{A}$ et $\vec{u}_y$, on a alors :

$$A_y = \vec{A} \cdot \vec{u}_y = \left\|\vec{A}\right\| \cos\beta = \left\|\vec{A}\right\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left\|\vec{A}\right\| \sin\theta$$

On peut également penser au cercle trigonométrique, comme ci-contre.



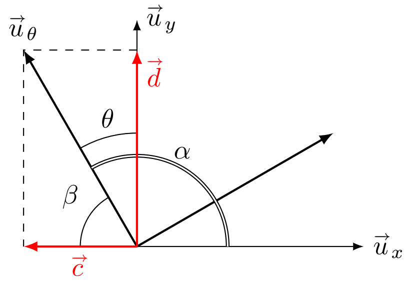
3 Projection et changement de base



$\vec{u}_r = \vec{a} + \vec{b}$
avec :

$$\begin{cases} \vec{a} &= \cos\theta \vec{u}_x \\ \vec{b} &= \sin\theta \vec{u}_y \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y}$$



$\vec{u}_\theta = \vec{c} + \vec{d}$
avec :

$$\begin{cases} \vec{c} &= -\sin\theta \vec{u}_x \\ \vec{d} &= \cos\theta \vec{u}_y \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y}$$

Attention pour $\vec{u}_\theta$, une des projection fait apparaitre un « - », deux façons pour le comprendre :

- Le produit scalaire de $\vec{u}_\theta$ avec $\vec{u}_x$ est :

$$\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_x = \cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

- Ou, on fait le produit scalaire de $\vec{u}_\theta$ avec $-\vec{u}_x$:

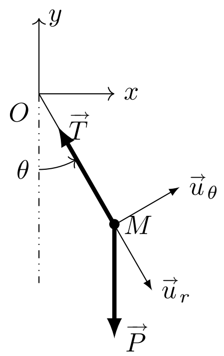
$$\vec{u}_\theta \cdot (-\vec{u}_x) = \cos(\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

  d'où $\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_x = -\sin\theta$

4 Exemples

Pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'un fil tendu sans masse et d'un point matériel M de masse m. L'axe (Oy) est l'axe vertical. Les forces s'exerçant sur le point M sont le poids $\vec{P}$ de norme P et la tension $\vec{T}$ du fil de norme T. La position du point M est paramétrée par l'angle θ (voir figure ci-contre). Déterminer les composantes de ces deux forces dans la base orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ définie sur le dessin.



Palet sur un plan incliné

On considère un palet sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Ce palet subit trois forces : son poids caractérisé par le vecteur $\vec{P}$ de norme P et de la part du plan incliné la réaction normale $\vec{N}$ de norme N et la réaction tangentielle $\vec{T}$ de norme T (frottements solide). On considère par ailleurs deux bases orthonormées du plan : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y)$.
Exprimer les trois forces considérées dans les deux bases différentes.